ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2019-06-10

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (10-06-2019)

ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 15.

β) i) Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35 **ii)** Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδ.α 36

Α2. Διατύπωση θεωρήματος, σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Α3. Απόδειξη Θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135.

Α4. α) Λάθος .

Αιτιολόγηση (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ δεν είναι σταθεή στο $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

β) Λάθος.

Αιτιολόγηση: (Σχόλιο σχολικού βιβλίου)

Η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 3 & , x=1 \end{cases} \text{ έχει } \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2\text{. Όμως } f(1)=2$$

(και οποιαδήποτε μη συνεχής συνάρτηση σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της που τοόριό της υπάρχει στο $\mathbb{R}$).

Α5. Το (γ) είναι η σωστή απάντηση (Ερώτημα 10- Ερωτήσεις κατανόησης Κεφάλαιο $3^{ο}$).

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1-1}=\frac{x_2}{x_2-1}\Leftrightarrow x_1x_2-x_1=x_1x_2-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι συνάρτηση «1-1» και επομένως υπάρχει η αντίστροφή της:

<u>Εύρεση αντίστροφης f^{-1}:</u>

Για κάθε $x\neq 1$ θέτουμε $f(x)=y$ και έχουμε ισοδύναμα:

$$f(x)=y\Leftrightarrow y=\frac{x}{x-1}\Leftrightarrow yx+y=x\Leftrightarrow yx-x=-y\Leftrightarrow x=\frac{y}{y-1} \text{ με } y\neq 1$$

Επομένως η αντίστροφη είναι:

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}, x\neq 1$$

(δηλαδή $f^{-1}(x)=f(x)\,, x\neq 1$)

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

Άρα $f'(2)=-1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-2=-(x-2)\Leftrightarrow y=-x+4$$

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ με:

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2},\ x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το πεδίο ορισμού της gof είναι:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{f(x)}\geq 2\}=\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{x}^2+1\geq 2\}=\{x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}:\mathrm{x}^2\geq 1\}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

Για κάθε $x\in D_{gof}$ έχουμε:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(\mathrm{x}^2+1)=\sqrt{\mathrm{x}^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}, x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$$

Γ2. Η ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ που $h(x)=\sqrt{x^2-1}, x\in\mathbb{R}\text{-}\{1\}$ έχει την μορφή $y=\lambda x+b$, όπου:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda \mathrm{x}]$$

Έχουμε:

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=1,\ b=\lim_{x\to+\infty}[h(x)-\lambda\mathrm{x}]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2-1}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

Άρα η $y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ (η διχοτόμος της γωνίας του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου των αξονων).

Γ3. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{h(x)-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο f. Επομένως θα είναι και συνεχης στο σημείο $x_0=1$.

Άρα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2 + a) = 1 + a$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-(x-1)^4 + \beta x) = \beta$$
$$f(1) = 1 + a$$

Πρέπει $\beta = 1 + \alpha$ (1)

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ θα έχουμε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2 + a - 1 - a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4 + \beta x - 1 - \alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4 + \beta x - 1 - (\beta - 1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)^4 + \beta x - \beta}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\left[-(x-1)^3 + \beta\right]}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\left[-(x-1)^3 + \beta\right] = \beta$$

Άρα $\beta = 2$ και από την (1) $\alpha = 1$

Δ2.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \ge 1 \\ -4(x-1)^3 + 2, & x < 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

$f'(x) > 0$ για κάθε $(-\infty, 1)$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1)$.

Επειδή η f είναι παντού συνεχής άρα και στο σημείο $x_0 = 1$ θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το:

$$f\left[(-\infty, 1)\right] = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

$$f\left[[1, +\infty)\right] = \left[f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty)$$

$$f\left[(-\infty,1)\right]\cup f\left[[1,+\infty)\right]=(-\infty,2)\cup[2,+\infty)=\mathbb{R}$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Εύρεση ρίζας της $f(x)$

Α΄τρόπος

Το $0\in f\left[(0,+\infty)\right]=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-1,+\infty)$ και άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in(0,+\infty)$-δηλαδή θετικό x_0, τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$. Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f, ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

Β΄τρόπος

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση f στο διάστημα $[0,1]$.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$(αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$)
- $\begin{matrix} f(0)=-1<0 \\ f(1)=2>0 \end{matrix}$ άρα $f(0)\cdot f(1)<0$ και άρα άρα υπάρχει, τουλάχιστον ένα, $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(x_0)=0$.

Το x_0 είναι μοναδικό διότι η f, ως γνησίως αύξουσα είναι και συνάρτηση «1-1».

Δ4. Έχουμε:

$$f^2(x)+x_0 f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\cdot\left[f(x)+x_0\right]=0$$

Τώρα: Για κάθε $x>x_0\Rightarrow f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)>0$

Ακόμα: $f(x)>-x_0$, αφού $f(x)>0$ και $-x_0<0$.

Επομένως :

$$f(x)\cdot\left[f(x)+x_0\right]>0\Leftrightarrow f^2(x)+x_0 f(x)>0$$

και άρα η εξίσωση $f^2(x)+x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Καραγιάννης Ιωάννης, Συντονιστής Εκπαιδευτικού Έργου, 2ο ΠΕ.Κ.Ε.Σ. Ν. Αιγαίου